2.4.9 Rovnice s absolutní hodnotou I

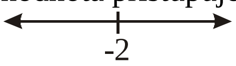
Předpoklady: 2401, 2404, 2405

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny odpovídá přibližně 25 minutám. Je samozřejmě možné ji spojit s následující hodinou, pak ovšem část příkladů nestihnete probrat. Já osobně využívám druhou polovinu hodiny na písemku a příklady 3 a 4 nechávám dopočítat studenty, kteří je nestihnou doma, aby na začátku příští hodiny bylo jasné, kdo má ještě nějaké problémy a potřebuje poradit.

Př. 1: Vyřeš rovnici $|x+2|=1$.

1. způsob – Odstranění absolutní hodnoty dělením definičního oboru na intervaly (jako u funkcí)

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$



$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in (-\infty;-2\rangle$ $\quad x+2 \le 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$

Řešíme rovnici $|x+2|=1$.

$-x-2=1$

$-3=x$

-3 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_1 = \{-3\}$

$x \in \langle -2;\infty)$ $\quad x+2 \ge 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$

Řešíme rovnici $|x+2|=1$.

$x+2=1$

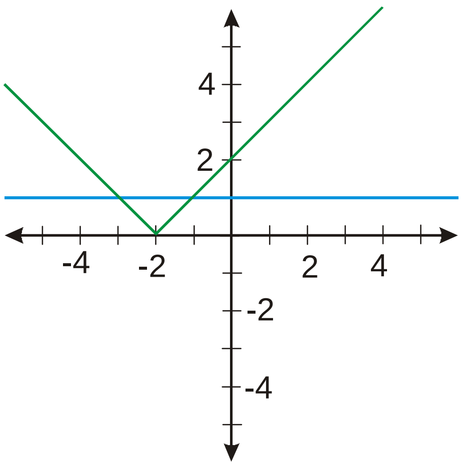
$x=-1$

-1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow K_2 = \{-1\}$

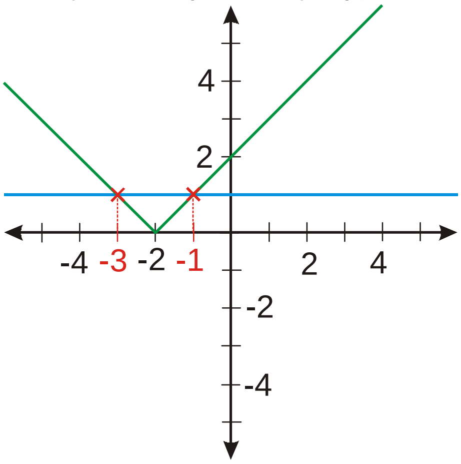
$K = K_1 \cup K_2 = \{-3;-1\}$

2. způsob - Grafické řešení

Nakreslíme grafy funkcí: $y=|x+2|$ (levá strana rovnice), a $y=1$ (pravá strana rovnice).



V místech, kde se oba grafy protínají, máme body se stejnými souřadnicemi x i y (obě funkce ze stejného x vyrobí stejné y) $\Rightarrow$ x-ové souřadnice těchto bodů jsou kořeny rovnice.



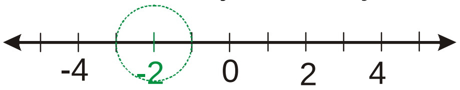
$K = \{-3, -1\}$

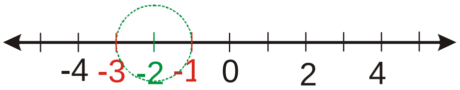
3. způsob – Využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel

$|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

Vyrobíme v absolutní hodnotě rozdíl: $|x+2| = |x-(-2)| = 1$.

$\Rightarrow$ Hledáme body, které mají od -2 vzdálenost 1.





$K = \{-3, -1\}$

Pedagogická poznámka: Využití významu absolutní hodnoty jsme opakovali v hodině 020401 (tedy nedávno). Pokud s touto metodou žáci mají problémy (i při využití sešitu) mělo by padnout něco o účelnosti jejich poznámek.

Metoda dělení definičního oboru je stejnou metodou, jakou jsme používali u kreslení funkcí.

Řešení rovnic	**Kreslení grafů**
Pomocí vnitřků absolutních hodnot určíme rozdělení na intervaly.	Pomocí vnitřků absolutních hodnot určíme rozdělení na intervaly.
V jednotlivých intervalech nahradíme absolutní hodnoty a získáme lineární rovnice.	V jednotlivých intervalech nahradíme absolutní hodnoty a získáme lineární funkce.
Řešíme jednotlivé rovnice.	Kreslíme jednotlivé funkce.
Zkontrolujeme, zda získané hodnoty patří mezi čísla, se kterými jsme v intervalu počítali.	Z nakreslené funkce vytáhneme pouze část, která patří k intervalu, pro který předpis platí.

Pedagogická poznámka: Pokud chceme vést studenty k tomu, aby se snažili spojovat různé poznatky a omezovali množství toho, co si musejí pamatovat, je úkol přesvědčit je, že oba postupy s dělením na intervaly jsou stejné, docela zásadní.

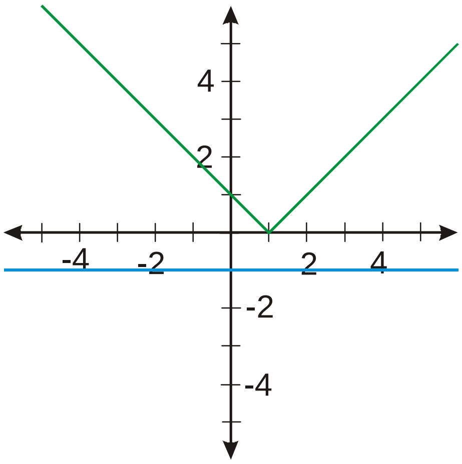
Poznámka: Podle očekávání jsme získali pomocí všech metod stejné výsledky.

Př. 2: Vyřeš rovnici $|x-1|=-1$ pomocí všech tří předchozích metod. Metodu dělení definičního oboru použij jako poslední.

1. způsob – Využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel
$|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

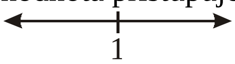
Zápis: $|x-1|=-1$ znamená $\Rightarrow$ hledáme body, které mají od 1 vzdálenost –1 $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení, protože vzdálenost dvou bodů na číselné ose nemůže být nikdy záporná (nesmysl).
$K=\emptyset$

2. způsob - Grafické řešení
Nakreslíme grafy funkcí: $y=|x-1|$ (levá strana rovnice), a $y=-1$ (pravá strana rovnice).



Oba grafy se neprotínají v žádném bodě $\Rightarrow$ rovnice nemá žádné kořeny.
$K=\emptyset$

3. způsob – Odstranění absolutní hodnoty dělením definičního oboru na intervaly
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) ? $\Rightarrow$ $x-1=0 \Rightarrow x=1$



$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x\in(-\infty;1\rangle$ $\qquad$ $x-1\le 0 \Rightarrow |x-1|=-(x-1)=-x+1$

Řešíme rovnici $|x-1|=-1$.

$-x+1=-1$
$2=x$
Zdá se, že jsme našli kořen, ale není to pravda (už víme, že rovnice nemá řešení z ostatních metod). 2 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\emptyset$

$x\in\langle 1;\infty)$ $\qquad$ $x-1\ge 0 \Rightarrow |x-1|=x-1$

Řešíme rovnici $|x-1|=-1$.

$x-1=-1$
$x=0$
Zdá se, že jsme našli kořen, ale není to pravda (už víme, že rovnice nemá řešení z ostatních metod). 0 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\emptyset$

$K=K_1\cup K_2=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Důvod, proč mají studenti používat metodu dělení na intervaly jako poslední je jasný. Ve chvíli, kdy v jednotlivých větvích dojdou ke zdánlivým výsledkům, už ví, že rovnice nemá řešení a tedy musí najít důvod, jak se zdánlivých výsledků zbavit. Právě hledání tohoto místa je hlavním smyslem příkladu.

Poznámka: Dále budeme používat pouze jednu metodu řešení, nejlépe tu nejjednodušší.

Př. 3: Vyřeš rovnici $|3x-7|=2$.

- Grafické řešení je obtížné a dá se předpokládat, že ve výsledku se budou vyskytovat zlomky $\Rightarrow$ nezískali bychom přesné výsledky.
- Vnitřek absolutní hodnoty se jenom obtížně dá interpretovat jako rozdíl dvou čísel.

$\Rightarrow$ **Řešíme odstraněním absolutní hodnoty dělením definičního oboru na intervaly.**

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow 3x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

$\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in \left(-\infty;\frac{7}{3}\right\rangle$ $3x-7 \le 0 \Rightarrow |3x-7| = -(3x-7) = -3x+7$

Řešíme rovnici $|3x-7|=2$.

$-3x+7=2$
$-3x=-5$

$x=\frac{5}{3}$ Platí $\frac{5}{3} \le \frac{7}{3}$. $\Rightarrow$ Číslo $\frac{5}{3}$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

$x \in \left\langle\frac{7}{3};\infty\right)$ $3x-7 \ge 0 \Rightarrow |3x-7| = 3x-7$

Řešíme rovnici $|3x-7|=2$.

$3x-7=2$
$3x=9$
$x=3$

Platí $3 \ge \frac{7}{3}$. $\Rightarrow$ Číslo 3 je mezi čísly, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\{3\}$

$K=K_1 \cup K_2=\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\left|x-\sqrt{3}+1\right|=2-\sqrt{3}$.

Opět zvolíme metodu dělení definičního oboru na intervaly.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje?) $\Rightarrow x-\sqrt{3}+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}-1 \doteq 0,73$

$\sqrt{3}$ - 1 $\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in \left(-\infty;\sqrt{3}-1\right\rangle$ $x-\sqrt{3}+1 \le 0 \Rightarrow \left|x-\sqrt{3}+1\right| = -\left(x-\sqrt{3}+1\right) = -x+\sqrt{3}-1$

Řešíme rovnici $\left|x-\sqrt{3}+1\right|=2-\sqrt{3}$.

$-x+\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$

$x=2\sqrt{3}-3 \doteq 0,46$

$2\sqrt{3}-3$ patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\left\{2\sqrt{3}-3\right\}$

$x\in\left\langle\sqrt{3}-1;\infty\right)$ $\qquad x-\sqrt{3}+1\geq 0 => \left|x-\sqrt{3}+1\right|=x-\sqrt{3}+1$

Řešíme rovnici $\left|x-\sqrt{3}+1\right|=2-\sqrt{3}$.

$x-\sqrt{3}+1=2-\sqrt{3}$

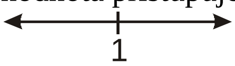
$x=1$

1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\{1\}$

$K=K_1\cup K_2=\left\{2\sqrt{3}-3;1\right\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $|1-x|=-2$ metodou dělení definičního oboru. Výsledek zkontroluj libovolnou další metodou.

Opět zvolíme metodu dělení definičního oboru na intervaly.
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje?) $\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$.



$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x\in(-\infty;1\rangle$ $\qquad 1-x\geq 0 \Rightarrow |1-x|=1-x$

Řešíme rovnici $|1-x|=-2$.

$1-x=-2$

$3=x$ 3 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_1=\emptyset$

$x\in\langle 1;\infty)$ $\qquad 1-x\leq 0 \Rightarrow |1-x|=-(1-x)=x-1$

Řešíme rovnici $|1-x|=-2$.

$x-1=-2$

$x=-1$ -1 nepatří mezi čísla, se kterými jsme počítali. $\Rightarrow$ $K_2=\emptyset$

$K=K_1\cup K_2=\emptyset$

Kontrola: Levou stranu rovnice tvoří absolutní hodnota, nemůže se tedy rovnat pravé straně, která je záporná.

Pedagogická poznámka: Během dvou předchozích příkladů žáci zapomenou dávat pozor na zápornou pravou stranu. Toho využívá předchozí příklad, ve kterém i lepší žáci často špatně odstraní absolutní hodnotu a tak získají výsledky, které kontrola odhalí jako nesprávné. Následovat by mělo samostatné hledání chyby.

Př. 6: Petáková:
strana 15/cvičení 15 c) e) f) h)

Shrnutí: Rovnice s absolutní hodnotou si rozdělením definičního oboru na intervaly převedeme na lineární rovnice. Postup se shoduje se způsobem, jakým jsme kreslili grafy.